Braunschweigische
Wissenschaftliche Gesellschaft

Jahrbuch 2015

Sonderdruck

Seiten 203–206

J. Cramer Verlag · Braunschweig
2016

Warum haben mathematische Modelle für Finanzzeitreihen im Jahr 2003 den Nobelpreis verdient?*

Jens-Peter Kreiss

Institut für Mathematische Stochastik der TU Braunschweig, Pockelsstraße 14
D-38106 Braunschweig, E-Mail: j.kreiss@tu-bs.de

Da es keinen Nobelpreis für Mathematik gibt, freut sich die mathematische Welt, wenn Nobelpreise für wissenschaftliche Ergebnisse mit einem deutlichen mathematischen Bezug vergeben werden. Für den Bereich der mathematischen Stochastik geschieht dies von Zeit zu Zeit beim sogenannten Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften, der korrekt *Preis der Schwedischen Reichsbank in Wirtschaftswissenschaften zur Erinnerung an Alfred Nobel* heißt und seit 1969 vergeben wird.

Professor Robert Fry Engle erhielt diesen Preis im Jahr 2003 für „Methoden zur Analyse ökonomischer Zeitreihen mit zeitlich veränderlicher Volatilität (ARCH)". Gemeinsam mit Robert Engle wurde Professor Clive W. J. Granger für seine Arbeiten zum Thema Kointegration ausgezeichnet. Engle, der 1942 in Syracuse im US-Bundesstaat New York geboren wurde, studierte zunächst Physik und promovierte anschließend an der Cornell University im Bereich Wirtschaftswissenschaften. Er war Professor am Massachusetts Institute of Technology (MIT) und der University of California, San Diego. Seit 2003 ist er Direktor des Volatility Institutes an der Stern School of Business in New York City. Die Veröffentlichung, die Robert Engle weltberühmt gemacht hat, wurde 1982 unter dem Titel „Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation" im renommierten Journal *Econometrica* veröffentlicht.

Das Wort Volatilität (Volatility) hat längst den Einzug in die Werbeprospekte der Banken und Finanzdienstleister gefunden. Engle hat den Begriff der Volatilität (oder bedingten Heteroskedastizität) für den Bereich der Zeitreihen eingeführt; präziser für den Bereich der Finanzzeitreihen. Dabei handelt es sich typischerweise um Renditen, d.h. relative Preisveränderungen, von Wertpapieren, Aktien, Wechselkuren oder Aktienindizes. Als Beispiel sind in Abbildung 1 die pro-

* Der Vortrag wurde am 12.06.2015 in der Klasse für Mathematik und Naturwissenschaften der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft gehalten.

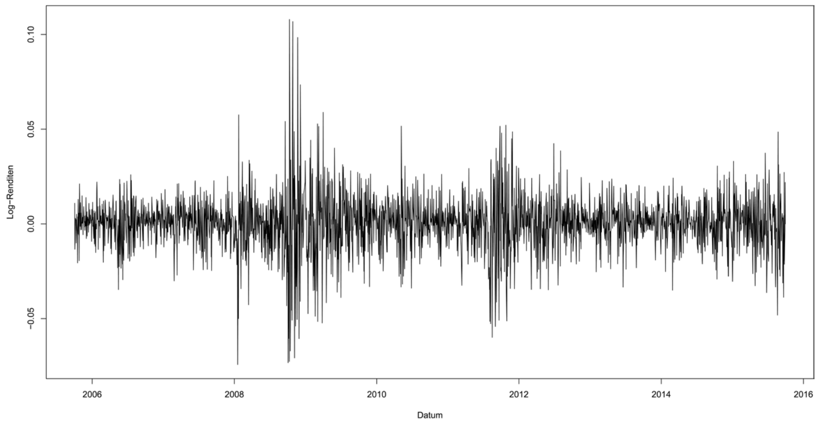

Abb. 1: Tägliche Renditen des DAX für einen 10-Jahreszeitraum (Herbst 2005 bis Herbst 2015).

zentualen täglichen Veränderungen des Deutschen Aktienindex DAX für einen 10-Jahreszeitraum zu sehen. Man erkennt in der Abbildung sehr deutlich, dass es Phasen unterschiedlicher Schwankungsbreite der Daten gibt. In den Arbeiten von Engle geht es genau um die Modellierung derartiger Phänomene mit geeigneten Klassen stochastischer Prozesse.

Das einfachste Modell, welches die klassische Zeitreihenanalyse bereithält, ist das sogenannte weiße Rauschen. Hierbei handelt es sich um eine Abfolge von unabhängigen oder zumindest unkorrelierten Zufallsgrößen mit Erwartungswert 0 und Streuung 1. Manchmal wird darüber hinaus noch die Gaußsche Normalverteilung für diese Zufallsgrößen angenommen. Ein unabhängiges und normalverteiltes weißes Rauschen tritt z.B. auf, wenn man, wie von Black, Merton und Scholes vorgeschlagen, eine geometrische Brownsche Bewegung zur Modellierung des Preises eines Finanzgutes verwendet, und hiervon auf einem zeitdiskreten äquidistanten Raster Renditen bestimmt. Auch das Black-Scholes Modell wurde mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet, und zwar im Jahre 1997.

Es wird allerdings schnell aus tatsächlichen Beobachtungen klar, dass die Renditen von Preisen eines Finanzgutes zu benachbarten Zeitpunkten zwar durchaus unkorreliert, aber nicht unabhängig voneinander sind. Und damit kommen wir in gewisser Weise zum Kern des Problems. Für normalverteilte Zufallsgrößen unterscheiden sich nämlich die Begriffe unabhängig und unkorreliert nicht. Aber für andere Verteilungen ist dies keineswegs der Fall. Korrelation misst lediglich einen linearen Zusammenhang zwischen Zufallsgrößen, so wie dies etwa bei der bekannten Ausgleichsgerade in der linearen Regression geschieht. Abhängigkeit von Zufallsgrößen kann aber sehr wohl nicht-linear sein. Es ist sogar möglich, dass sich eine komplexe nicht-lineare Abhängigkeit im Bereich der reinen linearen Abhängigkeiten, d.h. bei der Berechnung von Korrelationen, überhaupt nicht zu erkennen gibt. Und genau so eine Situation scheint bei der Betrachtung von Renditen von Preisen von Finanzgütern aufzutreten. Tatsächlich weisen derartige Renditezeitreihen in aller Regel keinerlei Korrelation über die Zeit auf. Dies ändert sich allerdings schon bei der Betrachtung von absoluten oder quadrierten Renditen, die in vielen Fällen eine hohe Korrelation über die Zeit aufweisen. Das bedeutet aber, dass Renditen über die Zeit keine lineare Abhängigkeit, aber sehr wohl eine nicht-lineare Abhängigkeit aufweisen. Da sich lineare und nicht-lineare Abhängigkeit in der Welt normalverteilter Zufallsgrößen nicht unterscheiden folgt weiter, dass sich die Normalverteilung (und damit auch die Brownsche Bewegung) für die Modellierung finanzieller Zeitreihen nicht eignet. Das von Engle vorgeschlagene ARCH (autoregressive model with conditional heteroscedasticity) Modell lässt sich in seiner einfachsten Form für Renditen (R_t) wie folgt schreiben

$$R_t = \sigma_t e_t \ , \ \sigma_t^2 = a_0 + a_1 R_{t-1}^2 \ , \ t=1,2,\ldots ,$$

wobei a_0 und a_1 die Parameter des Modells darstellen und (e_t) eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsgrößen mit Erwartungswert 0 und Streuung 1 bezeichnet.

Interessanterweise führt selbst eine Normalverteilungsannahme für die Zufallsgrößen e_t nicht dazu, dass auch die Renditen R_t normalverteilt sind. Ferner sind die Renditen R_t wie gewünscht zwar unkorreliert (d.h. es liegt keine lineare Abhängigkeit zwischen zwei benachbarten Renditewerten R_{t-1} und R_t vor), aber nicht unabhängig voneinander und somit eher in der Lage Finanzzeitreihen adäquat zu beschreiben.

Natürlich wurde die Modellklasse bereits von Engle nicht so einfach wie oben beschrieben formuliert. Außerdem wurden ARCH-Modelle von anderen Autoren (so etwa von Bollerslev (1986)) weiter verallgemeinert. Der wesentliche Aspekt wird aber bereits in dem obigen Modell gut sichtbar.

ARCH-Modelle und ihre Verallgemeinerung gehören heute zu den Standardmodellen für Finanzzeitreihen. Sie haben interessante wahrscheinlichkeitstheoretische Eigenschaften und stellen auch beim statistischen Schätzen der Parameter neue Anforderungen.

Der Verdienst Robert Engle's ist es, dass er die Tür zur Welt unkorrelierter aber nicht unabhängiger Zufallsgrößen, deren Existenz natürlich lange bekannt war, weit aufgestoßen hat und der Wissenschaft die Notwendigkeit der Betrachtung dieser Welt deutlich gemacht hat. Es ist eine Welt, die die klassische Gaußsche

Normalverteilung nicht kennt. Die mathematisch-stochastischen Fragestellungen in dieser Welt sind anspruchsvoll und haben zu neuen Erkenntnissen sowohl im Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie als auch im Bereich der mathematischen Statistik geführt. Bereits die Existenz von eindeutigen Lösungen der ARCH-Gleichungen in Abhängigkeit der Parameterwerte und der Verteilung der Zufallsgrößen e_t ist ein diffiziles und erkenntnisbringendes Problem. Hierin liegt aus meiner Sicht der große mathematisch-stochastische Verdienst von Robert Engle, der die Nobelpreiswürdigkeit eindrucksvoll verstärkt. Ob mit den ARCH-Modellen und ihren Verallgemeinerungen alle Probleme einer adäquaten Modellierung von Finanzdaten gelöst sind, kann dahingestellt bleiben.

Literatur

ANDERSEN, T.G., R. A. DAVIS, J.-P. KREISS, & T. MIKOSCH (Eds.) 2009: Handbook of Financial Time Series. Springer-Verlag.

BOLLERSLEV, T. 1986: Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. – Journal of Econometrics **31**:307–327.

ENGLE, R.F. 1982: Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. – Econometrica **50**:987–1007.